www.volsu.ru

# УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИМ РАЗВИТИЕМ

DOI: https://doi.org/10.15688/ek.jvolsu.2020.2.11

UDC 338.512:51-77
LBC 65.054

Submitted: 09.01.2020
Accepted: 12.02.2020

## ESTIMATES OF THE SOLUTION OF THE BALANCE MODEL CONSIDERING THE ENVIRONMENTAL FACTOR AND INVESTMENT

**Marina N. Pavlova**

Polytechnic Institute (Branch) of Don State Technical University in Taganrog, Taganrog, Russian Federation

**Larisa V. Tolmacheva**

Polytechnic Institute (Branch) of Don State Technical University in Taganrog, Taganrog, Russian Federation

**Elena V. Nazarova**

Azov-Black Sea Engineering Institute – Branch Don State Agrarian University of Zernograd, Zernograd, Russian Federation

**Abstract.** The article explains the nonlinear balance model that considers disposal and recycling of wastes and investments. The suggested model is the equilibrium prices model in which the costs of harmful wastage disposal and recycling are considered. Besides, there are nonlinear interrelations between the branches of production, which allows us to predict the release of useful products, which is necessary for the economists-analysts who are engaged in forecasting the manufactured products. For the model which is described by a system of differential equations, the conditions are created when the system of differential equations has only one solution. The paper defines the conditions under which this model is solvable and has a nonnegative solution, if at the same time the given values can be negative. For the model the methods of creating bilateral estimated solutions are adapted; the method of improving bilateral estimation is offered. Unlike the methods of searching the precise solution, the application of the method of bilateral estimation facilitates successful solution of tasks with big dimension of the processed models, without resorting to direct integration. The results of this article can be used in the solution of specific tasks of mathematics, economics, biology and other tasks with nonlinear interrelations.

**Key words:** economic system, macroeconomic modeling, forecasting, wastes production, wastes recycling, monotone operators, nonlinear model, cone space, Lipschitz condition.

**Citation.** Pavlova M.N., Tolmacheva L.V., Nazarova E.V. Estimates of the Solution of the Balance Model Considering the Environmental Factor and Investment. *Journal of Volgograd State University. Economics*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 119-127. (in Russian). DOI: https://doi.org/10.15688/ek.jvolsu.2020.2.11

УДК 338.512:51-77
ББК 65.054

Дата поступления статьи: 09.01.2020
Дата принятия статьи: 12.02.2020

# ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКТОР И ВЛОЖЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЙ

**Марина Николаевна Павлова**
Политехнический институт (филиал) ДГТУ в г. Таганроге, г. Таганрог, Российская Федерация

**Лариса Владимировна Толмачева**
Политехнический институт (филиал) ДГТУ в г. Таганроге, г. Таганрог, Российская Федерация

**Елена Владимировна Назарова**
Азово-Черноморский инженерный институт – филиал Донской ГАУ в г. Зернограде, г. Зерноград, Российская Федерация

**Аннотация.** В статье рассматривается макроэкономическая балансовая модель с непрерывным временем, учитывающая утилизацию, переработку вредных отходов, а также вложение инвестиций. Предложенная модель является моделью, в которой учитываются затраты на утилизацию и переработку вредных отходов, причем между отраслями производства существуют нелинейные взаимосвязи, которые позволяют прогнозировать выпуск полезных продуктов, что необходимо для экономистов-аналитиков, занимающихся выпуском производимой продукции. Для модели, которая описывается системой дифференциальных уравнений, установлены условия, при которых она имеет единственное решение. Определены условия, при которых данная модель является разрешимой и имеет неотрицательное решение, если при этом заданные величины могут принимать отрицательные значения. Для модели адаптированы методы построения двусторонних оценок решения, предложен метод улучшения двусторонних оценок. В отличие от методов поиска точного решения, применение метода двусторонних оценок способствует успешному решению задач с большой размерностью обрабатываемых моделей, без помощи непосредственного интегрирования. Результаты данной статьи могут быть использованы при решении конкретных задач математики, экономики, биологии и других задач с нелинейными взаимосвязями. Большинство современных моделей, имеющих практическую направленность и предназначенных для прогноза основных показателей экономики, построены на расширенных моделях межотраслевого баланса. Озабоченность экологической ситуацией заставляет субсидировать новые, достаточно «чистые» технологии, выделять дополнительные инвестиции на переработку вредных отходов и борьбу с загрязнением окружающей среды, что требует развития моделей многоотраслевой экономики. Для эффективного прогнозирования, планирования и управления крупными экономическими системами значительно удобнее считать, что время непрерывно. Следовательно, интерес представляют модели с непрерывным временем.

**Ключевые слова:** экономическая система, макроэкономическое моделирование, прогнозирование, выделение отходов, переработка отходов, монотонные операторы, нелинейная модель, пространство конусов, условие Липшица.

**Цитирование.** Павлова М. Н., Толмачева Л. В., Назарова Е. В. Оценки решения балансовой модели, учитывающей экологический фактор и вложение инвестиций // Вестник Волгоградского государственного университета. Экономика. – 2020. – Т. 22, № 2. – С. 119–127. – DOI: https://doi.org/10.15688/ek.jvolsu.2020.2.11

## Введение

Актуальными задачами экономического развития общества на современном этапе остаются задачи эффективного прогнозирования, управления экономическими системами, планирования. Большинство современных моделей, имеющих практическую направленность и предназначенных для прогноза основных показателей экономики, построены на расширенных моделях межотраслевого баланса. Макроэкономические модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: производство, потребление, инвестиции, занятость и др. [Karlin, 1995, p. 907–938; Торопцев, 2001, с. 10–20].

Развитие экономики неизбежно влечет за собой загрязнение окружающего мира. Выделение вредных отходов в процессе производственной деятельности приводит к борьбе с загрязнением окружающей среды. Часть вредных отходов может подвергаться утилизации и переработке. С усилением требований на ограничение выбросов вредных отходов переработка отходов становится актуальной и, соответственно, это влечет увеличение вложений инвестиции в их переработку.

Изложенные выше факторы принимаются во внимание в модели, предложенной в статье. В силу того что в макроэкономической модели учитывается вложение инвестиций, описание модели представляет собой систему дифференциальных уравнений. Учет выделения вредных отходов и их переработка приводят к тому, что заданные параметры системы могут принимать отрицательные значения. Проблема поиска положительного решения модели сводится к нахождению положительного решения операторного уравнения с дифференциальным оператором при наличии заданных неотрицательных и отрицательных величин.

Точное решение динамической балансовой модели с нелинейной зависимостью представляет некоторые трудности, связанные как с достаточно большим количеством данных, так и с методами решения таких моделей. В ряде случаев при построении и исследовании модели на начальном этапе не требуется знание точного решения, а достаточно иметь некоторую его оценку, позволяющую судить об адекватности модели. В связи с этим представляют интерес легко реализуемые методы получения оценок решения модели с непрерывным временем.

## Методология проведения работы

Исходя из жизненного опыта и особенностей технологических процессов, значительно удобнее рассматривать модель не с дискретным временем, а считать, что время непрерывно. Макроэкономическая модель, в которой учитываются выделения вредных отходов и вложение инвестиций, описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x(t) \geq A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + B_{11}\dfrac{dx(t)}{dt} + B_{12}\dfrac{dy(t)}{dt} + f_1(t), \\ y(t) \geq A_{21}x(t) + A_{22}y(t) + B_{21}\dfrac{dx(t)}{dt} + B_{22}\dfrac{dy(t)}{dt} - f_2(t), \\ x(t) \geq 0, y(t) \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x(t)$ – вектор валового выпуска полезного продукта; $y(t)$ – вектор вредных отходов в окружающей среде, возникающих в процессе производства и подлежащих уничтожению; $f_1(t)$ – вектор чистого выпуска полезного продукта; $f_2(t)$ – вектор остаточного уровня вредных отходов ; $A_{11}$ – $(n \times n)$ технологическая матрица; $A_{12}$ – такая $(n \times m)$ матрица, что $A_{12}y(t)$– вектор полезного продукта, возникающий при переработке вредных отходов в объеме вектора $y$; $A_{21}$ такая $(m \times n)$ матрица, что $A_{21}x(t)$ – вектор вредных отходов, создаваемых при выпуске полезного продукта в объеме вектора $x$; $A_{22}$ – такая $(m \times m)$ матрица, что при уничтожении вектора $y$ вредных отходов в окружающую среду выделяется вредных отходов в объеме вектора $A_{22}y(t)$; $B_{11}$ – матрица, характеризующая инвестиции части созданного в момент времени $t$ $i$-го продукта на создание дополнительного резерва производства для выпуска продукции; $B_{12}$ – матрица инвестиций, идущих на подавление вредных отходов, возникающих при создании дополнительного резерва производства; $B_{21}$ – матрица, характеризующая количество выделяемых единиц вредных отходов при увеличении производства полезного продукта; $B_{22}$ – матрица, характеризующая количество выделяемых вредных отходов, при подавлении вредных отходов, выделяющихся при увеличении годового производства продукта $x$.

Пусть промежуток времени $[0;T]$ – период прогноза.

Множество неотрицательных функций $\{x(t), y(t)\}$, $t \in [0;T]$, удовлетворяющих системе неравенств (1.1), будем называть *множеством планов* модели (1.1) и обозначим это множество функций через *П*.

Если множество планов задачи (1.1) не пустое, то оно, как правило, содержит бесконечное множество элементов.

Решение $\{x(t), y(t)\}$ из *П*, удовлетворяющее условию

$$\{x^*(t), y^*(t)\} = \{\inf\{x(t)\}, \inf\{y(t)\}\},$$

будем называть *решением* динамической балансовой модели [Исследование операций в экономике ... , 1997, с. 16–20].

Представим модель (1.1) в операторном виде. Обозначим:

$$f = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$$

1. В этом случае, система (1.1) перепишется следующим образом [Павлова, 2005, с. 30–35]

$$z = Az + B\frac{dz}{dt} + f. \quad (1.2)$$

Выразим из операторного уравнения $z$. Если существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$, то

$$z = (E-A)^{-1} \cdot B\frac{dz}{dt} + (E-A)^{-1} f.$$

Последняя система уравнений эквивалентна операторному уравнению

$$z = C\frac{dz}{dt} + g,$$

где $C = (E-A)^{-1}B, g = (E-A)^{-1} f, C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$,

$$g = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ -g_2(t) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, модель (1.1) примет вид [Павлова и др., 2012, с. 46]:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{d}{dt}C_{11}x(t) + \frac{d}{dt}C_{12}y(t) + g_1(t), \\ y(t) = \frac{d}{dt}C_{21}x(t) + \frac{d}{dt}C_{22}y(t) - g_2(t). \end{cases} \quad (1.3)$$

Система (1.3) при $C_{ij}(x) = \frac{d}{dt}C_{ij}x(t)$, $C_{ij}(y) = \frac{d}{dt}C_{ij}y(t)$, $i,j = 1,2$ имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_{11}(x) + C_{12}(y) + g_1, \\ y = C_{21}(x) + C_{22}(y) - g_2., \end{cases} \quad (1.4)$$

где $C_{ij}(x)$, $C_{ij}(y)$ $i,j = 1,2$ – монотонные операторы.

***Замечание.*** Оператор вида $C_{ij}(\varphi) = \frac{d}{dt}C_{ij}\varphi(t)$ в рассматриваемом нами случае означает, что производная по $t$ берется от произведения матрицы на вектор, координаты которого являются функциями от $t$. В дальнейшем нам понадобится монотонность операторов $C_{ij}$ по $\varphi(t)$, для этого необходимо потребовать выполнение условий, позволяющих дифференцировать неравенства. Например, для монотонности операторов $C_{ij}$ достаточно, чтобы функции $x(t)$ и $y(t)$ были непрерывными и неубывающими (в этом случае операторы будут линейными положительными, а значит, и монотонными).

Предположение о том, что функции $x(t)$ и $y(t)$ неубывающие, является естественным и с экономической точки зрения: с течением времени в стабильном и развивающемся обществе валовой выпуск продукции и выброс вредных отходов в окружающую среду при данной технологии и имеющемся перечне товаров не уменьшается.

Перепишем модель (1.4) в виде

$$z = C(z) + g, \quad (1.5)$$

где $C$ – положительный оператор со спектральным радиусом меньше единицы. При этом для (1.5) работает итерационный метод [Стеценко и др., 2004, с. 51–53], который в общем виде представим: $z_{n+1} = C(z_n) + g$.

Построим оценки к решению этого уравнения. Итерационный процесс, предложенный в [Павлова и др., 2012, с. 73–74], строится следующим образом. Выбираются начальные приближения $u_0$ и $v_0$, удовлетворяющие соотношениям

$$u_0 \le v_0, u_0 \le C(u_0) + g, C(v_0) + g \le v_0$$

(запись $u \le v$ означает, что компоненты вектора $v - u$ неотрицательны).

Последовательные приближения $u_k$, $v_k$ и $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$ находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_0 = u_0, \tilde{v}_0 = v_0, \\ &u_{k=1} = C(\tilde{u}_k) + g,\ v_{k=1} = C(\tilde{v}_k) + g \\ &\tilde{u}_{k+1} = \frac{1}{1+p_{k+1}}(u_{k+1} + p_{k+1}v_{k+1}), \\ &\tilde{v}_{k+1} = \frac{1}{1+q_{k+1}}(v_{k+1} + q_{k+1}u_{k+1}) \\ &k = 1,2,... \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь неотрицательные параметры $p_{k=1}$, $q_{k=1}$ выбираются так, чтобы на каждом шаге были выполнены соотношения

$$\tilde{u}_k \le u_{k+1},\ v_{k+1} \le \tilde{v}_k .$$

Как показано в [Исследование операций в экономике, 1997, с. 407], получаемые последовательные приближения сходятся к решению $z^*$ задачи (1.5). При этом процесс (1.6) монотонен:

$$C(u_k) + g \le \tilde{u}_k \le z^* \le \tilde{v}_k \le C(v_k) + g .$$

Если в итерационном процессе (1.6) параметры $p_k$, $q_k$ определены соотношениями

$$\begin{gathered} p_k = \max\{p : p \ge 0, \tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1} \ge p(\tilde{v}_{k-1} - \tilde{v}_k)\} \\ q_k = \max\{q : q \ge 0, \tilde{v}_{k-1} - \tilde{v}_k \ge q(\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-1})\} \\ \tilde{u}_{k+1} = C(u_k) \quad \tilde{v}_{k+1} = C(v_k) \end{gathered},$$

тогда справедлива оценка

$$\|\tilde{v}_{k+1} - \tilde{u}_{k+1}\| \le \left|\frac{\chi - 1}{\chi + 1}\right| q_l \|v_k - u_k\|,$$

где $\dfrac{\inf(c : x \ge cy)}{\sup(c : cx \le y)} \le \chi^2$. Число $\chi$ назовем постоянной фокусирования.

Решение модели можно получить, используя метод последовательных приближений. При этом метод сходится со скоростью убывающей геометрической прогрессии.

Рассмотренная выше модель получила дальнейшее развитие [Павлова и др., 2016, с. 70–72]. Модель, которая учитывает не только выделенные отходы, но и их переработку, с учетом вложенных инвестиций, представим следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = A_{11}x(t) + \left(A_{12}^{(1)} - A_{12}^{(2)}\right)y(t) + B_{11}\dfrac{dx(t)}{dt} + \\ \left(B_{12}^{(1)} - B_{12}^{(2)}\right)\dfrac{dy(t)}{dt} + f_1(t), \\ y(t) = A_{21}x(t) + A_{22}y(t) + B_{21}\dfrac{dx(t)}{dt} + \\ B_{22}\dfrac{dy(t)}{dt} - f_2(t), \\ x(t) \ge 0,\ y(t) \ge 0, \dfrac{dx(t)}{dt} \ge 0, \dfrac{dy(t)}{dt} \ge 0, t \in [0;T]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $A_{12}^{(1)}$ – такая $(n \times m)$ матрица, что:

– $A_{12}^{(1)}y(t)$ – вектор полезного продукта, возникающий при переработке вредных отходов в объеме вектора $y$;

– $A_{12}^{(2)}y(t)$ – вектор полезных продуктов, затрачиваемых на переработку вектора $y$ вредных отходов (утилизация отходов);

– $B_{12}^{(1)}y(t)$ – матрица инвестиций, идущих на подавление вредных отходов, возникающих при создании дополнительного резерва производства;

– $B_{12}^{(2)}y(t)$ – вектор инвестиций, высвобождаемых за счет утилизации вредных отходов.

Представим модель (2.1) в операторном виде. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ -f_2(t) \end{pmatrix},$$

$$z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}^{(1)} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В этом случае система (2.1) будет представлена операторным уравнением (1.2):

$$z = Az + B\frac{dz}{dt} + f .$$

Аналогично преобразованиям модели (1.1) модель (2.1) примет вид

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{d}{dt}C_{11}x(t) + \dfrac{d}{dt}C_{12}^{(1)}y(t) - \dfrac{d}{dt}C_{12}^{(2)}y(t) + g_1(t), \\ y(t) = \dfrac{d}{dt}C_{21}x(t) + \dfrac{d}{dt}C_{22}y(t) - g_2(t) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = C_{11}(x) + C_{12}^{(1)}(y) - C_{12}^{(2)}(y) + g_1, \\ y = C_{21}(x) + C_{22}(y) - g_2, \end{cases}$$

где $C_{ij}(x)$, $C_{ij}(y)$ $i,j = 1,2$ – монотонные операторы.

Если операторы $C_{ij}$ удовлетворяют условиям Липшица:

$$\|C_i(u) - C_i(v)\| \le q_{Li}\|u - v\|,\ (\mathrm{i} = 1,2),$$

где $q_{Li}$ – константа Липшица, а также существуют элементы $u_1, v_1, u_2, v_2$, удовлетворяющие условиям: $\theta \le u_1 \le u_2$, $\theta \le v_1 \le v_2$

$$\begin{cases} u_1 \le C_{11}(u_1) + C_{12}^{(1)}(v_1) - C_{12}^{(2)}(v_2) + g_1, \\ u_2 \ge C_{11}(u_2) + C_{12}^{(1)}(v_2) - C_{12}^{(2)}(v_1) + g_1, \\ \quad v_1 \le C_{21}(u_1) + C_{22}(v_1) - g_2, \qquad , \\ \quad v_2 \ge C_{21}(u_2) + C_{22}(v_2) - g_2. \end{cases}$$

то существует единственное решение модели (2.1) [Стеценко и др., 1998, с. 74–75], причем

$$u_1 \le x^* \le u_2, \quad v_1 \le y^* \le v_2.$$

## Результаты работы

В общей постановке модель (2.1) можно переписать в виде операторного уравнения с монотонно разложимым оператором:

2. $C(z) = C_1(z) - C_2(z)$ [Островский, 1977, с. 233–238; Кубекова и др., 2001, с. 846–854]:

$$z = C_1(z) - C_2(z) + g. \qquad (2.2)$$

Здесь $C_1(z)$, $C_2(z)$ – *монотонные операторы.* Операторное уравнение (2.2) целесообразно записать в виде

$$z = (C_1 - C_2)\,(z) + g, \qquad (2.3)$$

где $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ -g_2 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}^{(1)} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По уравнению (2.3) построим новое уравнение

$$\tilde{z} = \tilde{C}(\tilde{z}) + \tilde{g}, \qquad (2.4)$$

где $\tilde{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tilde{g} = \begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix}, \tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 & -C_2 \\ -C_2 & C_1 \end{pmatrix}.$

Элемент $\tilde{z}$ можно рассматривать как элемент нового пространства $\tilde{E} = (E, E)$ с нормой $\|\tilde{z}\| = \|x\| + \|y\|$, полуупорядоченного конусом $\tilde{K} = (K, -K)$. При этом конус $\tilde{K}$ «наследует» основные свойства конуса *K*.

Оператор $C_1$ является монотонным (то есть из $x_1 \le x_2$ следует, что $C(x_1) \le C(x_2)$), а $C_2$ – антитонным (то есть из $x_1 \le x_2$ => $C(x_1) \ge C(x_2)$) [Павлова, 2012, с. 100].

Пусть оператор $\tilde{C}(\tilde{z})$ уравнения (2.4) монотонен, непрерывен и вполне непрерывен и удовлетворяет условиям Липшица

$$\|C_i(u) - C_i(v)\| \le q_{Li}\|u - v\|, (i = 1,2)$$

и пусть $u_{k+1} = C_1(u_k) - C_2(v_k) + g$, $v_{k+1} = C_1(v_k) - C_2(u_k) + g$, причем $u_0$, $v_0$ удовлетворяют неравенствам

$$C_1(u_0) - C_2(v_0) + g \ge u_0,\ C_1(v_0) - C_2(u_0) + g \le v_0$$

и положим

$$u_{k+1}^* = \frac{u_{k+1} + m_k v_{k+1}}{1 + m_k},\ v_{k+1}^* = \frac{v_{k+1} + m_k u_{k+1}}{1 + m_k},$$

где $m_k = \max\begin{Bmatrix} m : u_{k+1} - u_k \ge m(v_k - v_{k+1}), \\ v_k - v_{k+1} \ge m(u_{k+1} - u_k) \end{Bmatrix}.$

Тогда имеют место неравенства

$$u_0 \le u_1^* \le u_k^* \le \ldots \le z^* \le \ldots \le v_k^* \le v_1^* \le v_0 \qquad (2.5)$$

и либо метод сходится за конечное число шагов, либо верна оценка:

$$\|v_{k+1}^* - u_{k+1}^*\| \le \frac{\chi - 1}{\chi + 1} q_L \|v_k - u_k\|,$$

$q_L$ – константа Липшица.

## Область применения результатов

Построение отрезка (2.5) можно рассматривать как один шаг рекуррентного процесса по уточнению двусторонних границ неизвестного решения $x^*$ исходного уравнения. Повторяя этот процесс достаточное число раз, мы в итоге получим метод построения двусторонних приближений, который можно рассматривать как метод ускорения сходимости двусторонних приближений $u_n$, $v_n$ в случае уравнения с монотонно разложимым оператором.

Рассмотрим еще один метод двусторонних приближений, позволяющий оценить решение моделей.

И динамическую модель, учитывающую подавление вредных отходов, и модель, учитывающую переработку, можно представить в виде операторного уравнения (2.4).

При этом будем предполагать, что спектральный радиус оператора $C$ меньше единицы.

При сделанных предположениях к решению уравнения будут сходиться последовательные приближения и для одной и для другой моделей:

$$\tilde{z}_{n+1} = \tilde{C}(\tilde{z}_n) + \tilde{g}, (i = 0,1,2,...).$$

Предположим, что найдено несколько первых элементов последовательности. Ставится вопрос: как, не прибегая к новым итерациям, а используя лишь найденные приближения, получить более точные приближения к решению $z^*$ [Исследование операций в экономике, 1997, с. 407]. При этом для нас особый интерес будут представлять приближения к $z^*$ «по недостатку» и «по избытку». Если для последовательных приближений $z_{k-p}, z_k, z_{k+p}$, где $k$ и $p$ – фиксированные натуральные числа ($k \geq p$), выполняется неравенство

$$z_{k+p} - z_k \leq \gamma(z_k - z_{k-p}),$$

причем $0 \leq \gamma < 1$.

Тогда для решения $z^*$ уравнения рассматриваемого уравнения справедлива оценка

$$z^* \leq z_{k+p} + \frac{\gamma}{1-\gamma}(z_{k+p} - z_k).$$

Если для последовательных приближений $z_{k-p}, z_k, z_{k+p}$, где $k$ и $p$ – фиксированные натуральные числа ($k \geq p$), выполняется неравенство

$$\beta(z_k - z_{k-p}) \leq z_{k+p} - z_k,$$

где $\beta \in (0; 1)$.

Тогда для решения $z^*$ уравнения справедлива оценка

$$z^* \geq z_{k+p} + \frac{\beta}{1-\beta}(z_{k+p} - z_k).$$

## Заключение

Таким образом, решение модели можно получить, используя метод последовательных приближений. Двусторонние оценки и описанный метод ускорения приближений к решению убеждают в адекватности рассматриваемой модели, не прибегая к нахождению точного решения.

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*


Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи : ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

Кубекова, Б. С. Об одном методе построения двусторонних приближений к решению операторного уравнения с монотонно разложимым оператором / Б. С. Кубекова, М. Н. Павлова, В. Я. Стеценко // Журнал вычислительная математика и математическая физика. – 2001. – Т. 41, № 6. – С. 846–854.

Островский, А. Ю. О сходимости монотонных итерационных процессов / А. Ю. Островский // Вычислительная математика и математическая физика. – 1977. – Т. 17, № 1. – С. 233–238.

Павлова, М. Н. Динамические балансовые модели с непрерывным временем с учетом экологического фактора и вложения инвестиций в развитие производства / М. Н. Павлова, Е. М. Петлина. – Ростов н/Д : Издат. центр ДГТУ, 2012. – 100 с.

Павлова, М. Н. Модель отраслевого баланса, учитывающая экологический фактор / М. Н. Павлова. – Ставрополь : Изд-во СКСИ, 2005. – 60 с.

Павлова, М. Н. Нелинейная балансовая модель, учитывающая переработку вредных отходов / М. Н. Павлова, А. А. Борисова, Н. В. Черникова // МОНИТОРИНГ. Наука и Технологии. – 2016. – № 4 (29). – С. 70–72.

Стеценко, В. Я. Модель межотраслевого баланса, учитывающая выделение вредных отходов и их утилизацию. Математическое развитие модели / В. Я. Стеценко, Т. С. Сергеева, М. Н. Павлова. – Ставрополь : Изд-во СГУ, 2004. – 127 с.

Стеценко, В. Я. Элементы теории полуупорядоченных пространств. Приближенное решение операторных уравнений / В. Я. Стеценко, И. А. Галкина. – Ставрополь : Изд-во СГУ, 1998. – 168 с.

Торопцев, Е. Л. Моделирование процессов экономической динамики макросистем : монография / Е. Л. Торопцев. – СПб. : Изд-во СПбГУ ЭФ, 2001. – 135 с.

Karlin, S. Positive Operators / S. Karlin // T. Math. Mech. – 1995. – № 8. – P. 907–938.

### *REFERENCES*

Kremer N.Sh., Putko B.A., Trishin I.M., Fridman M.N. *Issledovanie operatsiy v ekonomike: ucheb. posobiye dlya vuzov* [Operations Research in Economics. Textbook for Universities]. Moscow, Banki i birzhi Publ., UNITY Publ., 1997. 407 p.

Kubekova B.S., Pavlova M.N., Stetsenko V.Ya. Ob odnom metode postroeniya dvustoronnikh priblizheniy k resheniyu operatornogo uravneniya s monotonno razlozhimym operatorom [On a Method for Constructing Two-Sided Approximations to the Solution of an Operator Equation with a Monotonically Decomposable Operator]. *Zhurnal vychislitelnaya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2001, vol. 41, no. 6, pp. 846-854.

Ostrovskiy A.Yu. O skhodimosti monotonnykh iteratsionnykh protsessov [On the Convergence of Monotone Iterative Processes]. *Vychislitelnaya matematika i matematicheskaya fizika* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1977, vol. 17, no. 1, pp. 233-238.

Pavlova M.N., Petlina E.M. *Dinamicheskie balansovye modeli s nepreryvnym vremenem s uchetom ekologicheskogo faktora i vlozheniya investitsiy v razvitie proizvodstva* [Dynamic Balance Models with Continuous Time, Taking into Account the Environmental Factor and Investing in Production Development]. Rostov-on-Don, Izdatelskiy tsentr DGTU, 2012. 100 p.

Pavlova M.N. *Model otraslevogo balansa, uchityvayushchaya ekologicheskiy faktor* [Model of the Industrial Balance Taking into Account the Ecological Factor]. Stavropol, SKSI, 2005. 60 p.

Pavlova M.N., Borisova A.A., Chernikova N.V. Nelineynaya balansovaya model, uchityvayushchaya pererabotku vrednykh otkhodov [Non-Linear Balance Model Accounting Hazardous Waste Recycling]. *Monitoring. Nauka i Tekhnologii* [Monitoring. Science and Technologies], 2016, no. 4 (29), pp. 70-72.

Stetsenko V.Ya., Sergeeva T.S., Pavlova M.N. *Model mezhotraslevogo balansa, uchityvayushchaya vydelenie vrednykh otkhodov i ikh utilizatsiyu. Matematicheskoe razvitie modeli* [Model of Intersectoral Balance That Takes into Account the Release of Harmful Waste and Its Disposal. Mathematical Development of the Model]. Stavropol, SGU, 2004. 127 p.

Stetsenko V.Ya., Galkina I.A. *Elementy teorii poluuporyadochennykh prostranstv. Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy* [Elements of the Theory of Partially Ordered Spaces. Approximate Solution of the Operator Equations]. Stavropol, SGU, 1998. 168 p.

Toroptsev E.L. *Modelirovanie protsessov ekonomicheskoy dinamiki makrosistem: monografiya* [Modeling of Processes of Economic Dynamics of Macro Systems. Monograph]. Saint Petersburg, SPbGU EF, 2001. 135 p.

Karlin S. Positive Operators. *T. Math. Mech.*, 1995, no. 8, pp. 907-938.


## Information About the Authors


**Marina N. Pavlova**, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Humanitarian and Natural Science Disciplines, Polytechnic Institute (Branch) of Don State Technical University in Taganrog, Petrovskaya St., 109-a, 347904 Taganrog, Russian Federation, pavlova_mn@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7656-5521

**Larisa V. Tolmacheva**, Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Department of Technology of Mechanical Engineering, Polytechnic Institute (Branch) of Don State Technical University in Taganrog, Petrovskaya St., 109-a, 347904 Taganrog, Russian Federation, tolmacheva_larisa58@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8723-6486

**Elena V. Nazarova**, Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics and Bioinformatics, Azov-Black Sea Engineering Institute – Branch Don State Agrarian University of Zernograd, Lenina St., 19, 347740 Zernograd, Russian Federation, niv671@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0003-1142-5138


## Информация об авторах


**Марина Николаевна Павлова**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры гуманитарных и естественнонаучных дисциплин, Политехнический институт (филиал) ДГТУ в г. Таганроге, ул. Петровская, 109-а, 347904 г. Таганрог, Российская Федерация, pavlova_mn@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-7656-5521

**Лариса Владимировна Толмачева**, кандидат технических наук, доцент кафедры технологии машиностроения, Политехнический институт (филиал) ДГТУ в г. Таганроге, ул. Петровская, 109-а, 347904 г. Таганрог, Российская Федерация, tolmacheva_larisa58@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8723-6486

**Елена Владимировна Назарова**, кандидат технических наук, доцент кафедры математики и биоинформатики, Азово-Черноморский инженерный институт – филиал Донской ГАУ в г. Зернограде, ул. Ленина, 19, 347740 г. Зерноград, Российская Федерация, niv671@rambler.ru, https://orcid.org/0000-0003-1142-5138